

IV. 線形偏微分方程式

1. 一次元波動方程式

1. 一次元波動方程式— 1.1 方程式の導出

1. 一次元波動方程式— 1.1 方程式の導出

単位長さあたりの質量が一定値 $\rho > 0$ の弦が一定の張力 $T > 0$ で水平に張られているとする. 更に T は充分大きく, そのため重力の効果は無視できるとする.

1. 一次元波動方程式— 1.1 方程式の導出

単位長さあたりの質量が一定値 $\rho > 0$ の弦が一定の張力 $T > 0$ で水平に張られているとする. 更に T は充分大きく, そのため重力の効果は無視できるとする. 今この弦が垂直方向に微小振動ををするとする. この振動は充分小さく, その結果弦の各部分は垂直方向にのみ動き水平方向のずれは生じないとする. 更に「曲げ」に対する抵抗も無視できるとする.

1. 一次元波動方程式— 1.1 方程式の導出

単位長さあたりの質量が一定値 $\rho > 0$ の弦が一定の張力 $T > 0$ で水平に張られているとする. 更に T は充分大きく, そのため重力の効果は無視できるとする. 今この弦が垂直方向に微小振動ををするとする. この振動は充分小さく, その結果弦の各部分は垂直方向にのみ動き水平方向のずれは生じないとする. 更に「曲げ」に対する抵抗も無視できるとする.

(一次元) 空間 or 長さに対応する変数を x とし, 時間に対応する変数を t として弦の各 (x, t) における (垂直方向の) 変位の大きさを未知関数 $u(x, t)$ よって表すことにする.

1. 一次元波動方程式— 1.1 方程式の導出

単位長さあたりの質量が一定値 $\rho > 0$ の弦が一定の張力 $T > 0$ で水平に張られているとする. 更に T は充分大きく, そのため重力の効果は無視できるとする. 今この弦が垂直方向に微小振動ををするとする. この振動は充分小さく, その結果弦の各部分は垂直方向にのみ動き水平方向のずれは生じないとする. 更に「曲げ」に対する抵抗も無視できるとする.

(一次元) 空間 or 長さに対応する変数を x とし, 時間に対応する変数を t として弦の各 (x, t) における (垂直方向の) 変位の大きさを未知関数 $u(x, t)$ よって表すことにする.

微小区間 $[x, x + \Delta x]$ についてその端点での張力を $T(x), T(x + \Delta x)$ とするとき, 「弦の各点は垂直方向にのみ動く」という仮定から各点で張力の水平方向の成分は一定値 T である. よって張力の働く向きと水平方向の成す角を θ とすると,

$$T(x) \cos \theta(x) = T(x + \Delta x) \cos \theta(x + \Delta x) = T \quad (1)$$

1. 一次元波動方程式— 1.1 方程式の導出

単位長さあたりの質量が一定値 $\rho > 0$ の弦が一定の張力 $T > 0$ で水平に張られているとする. 更に T は充分大きく, そのため重力の効果は無視できるとする. 今この弦が垂直方向に微小振動をするとする. この振動は充分小さく, その結果弦の各部分は垂直方向にのみ動き水平方向のずれは生じないとする. 更に「曲げ」に対する抵抗も無視できるとする.

(一次元) 空間 or 長さに対応する変数を x とし, 時間に対応する変数を t として弦の各 (x, t) における (垂直方向の) 変位の大きさを未知関数 $u(x, t)$ よって表すことにする.

微小区間 $[x, x + \Delta x]$ についてその端点での張力を $T(x), T(x + \Delta x)$ とするとき, 「弦の各点は垂直方向にのみ動く」という仮定から各点で張力の水平方向の成分は一定値 T である. よって張力の働く向きと水平方向の成す角を θ とすると,

$$T(x) \cos \theta(x) = T(x + \Delta x) \cos \theta(x + \Delta x) = T \quad (1)$$

次にこの微小区間に垂直に働く力は, 各端点に働く張力の垂直方向の成分なのでこれは

$$-T(x) \sin \theta(x) + T(x + \Delta x) \sin \theta(x + \Delta x)$$

1. 一次元波動方程式— 1.1 方程式の導出

単位長さあたりの質量が一定値 $\rho > 0$ の弦が一定の張力 $T > 0$ で水平に張られているとする. 更に T は充分大きく, そのため重力の効果は無視できるとする. 今この弦が垂直方向に微小振動ををするとする. この振動は充分小さく, その結果弦の各部分は垂直方向にのみ動き水平方向のずれは生じないとする. 更に「曲げ」に対する抵抗も無視できるとする.

(一次元) 空間 or 長さに対応する変数を x とし, 時間に対応する変数を t として弦の各 (x, t) における (垂直方向の) 変位の大きさを未知関数 $u(x, t)$ よって表すことにする.

微小区間 $[x, x + \Delta x]$ についてその端点での張力を $T(x), T(x + \Delta x)$ とするとき, 「弦の各点は垂直方向にのみ動く」という仮定から各点で張力の水平方向の成分は一定値 T である. よって張力の働く向きと水平方向の成す角を θ とすると,

$$T(x) \cos \theta(x) = T(x + \Delta x) \cos \theta(x + \Delta x) = T \quad (1)$$

次にこの微小区間に垂直に働く力は, 各端点に働く張力の垂直方向の成分なのでこれは

$$-T(x) \sin \theta(x) + T(x + \Delta x) \sin \theta(x + \Delta x)$$

よってこの微小区間の垂直方向の運動を表す運動方程式は

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -T(x) \sin \theta(x) + T(x + \Delta x) \sin \theta(x + \Delta x)$$

1. 一次元波動方程式— 1.1 方程式の導出

単位長さあたりの質量が一定値 $\rho > 0$ の弦が一定の張力 $T > 0$ で水平に張られているとする。更に T は充分大きく、そのため重力の効果は無視できるとする。今この弦が垂直方向に微小振動をするとする。この振動は充分小さく、その結果弦の各部分は垂直方向にのみ動き水平方向のずれは生じないとする。更に「曲げ」に対する抵抗も無視できるとする。

(一次元) 空間 or 長さに対応する変数を x とし、時間に対応する変数を t として弦の各 (x, t) における (垂直方向の) 変位の大きさを未知関数 $u(x, t)$ よって表すことにする。

微小区間 $[x, x + \Delta x]$ についてその端点での張力を $T(x), T(x + \Delta x)$ とするとき、「弦の各点は垂直方向にのみ動く」という仮定から各点で張力の水平方向の成分は一定値 T である。よって張力の働く向きと水平方向の成す角を θ とすると、

$$T(x) \cos \theta(x) = T(x + \Delta x) \cos \theta(x + \Delta x) = T \quad (1)$$

次にこの微小区間に垂直に働く力は、各端点に働く張力の垂直方向の成分なのでこれは

$$-T(x) \sin \theta(x) + T(x + \Delta x) \sin \theta(x + \Delta x)$$

よってこの微小区間の垂直方向の運動を表す運動方程式は

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -T(x) \sin \theta(x) + T(x + \Delta x) \sin \theta(x + \Delta x)$$

ここで (1) を用いると上式は次のように変形される

$$\frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{-T(x) \sin \theta(x)}{T(x) \cos \theta(x)} + \frac{T(x + \Delta x) \sin \theta(x + \Delta x)}{T(x + \Delta x) \cos \theta(x + \Delta x)} = -\tan \theta(x) + \tan \theta(x + \Delta x)$$

1. 一次元波動方程式— 1.1 方程式の導出

各点での張力はその点での弦の接線方向を向いているので $\tan \theta(x + \Delta x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x)$,

$$\tan \theta(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x)$$

1. 一次元波動方程式— 1.1 方程式の導出

各点での張力はその点での弦の接線方向を向いているので $\tan \theta(x + \Delta x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x)$,

$\tan \theta(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x)$ 従って (2) は次のように変形される

$$\frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right)$$

1. 一次元波動方程式— 1.1 方程式の導出

各点での張力はその点での弦の接線方向を向いているので $\tan \theta(x + \Delta x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x)$,

$\tan \theta(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x)$ 従って (2) は次のように変形される

$$\frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right)$$

ここで $\Delta x \rightarrow 0$ の極限をとると (一次元) 波動方程式とよばれる偏微分方程式が得られる.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left(c^2 = \frac{T}{\rho} > 0 \right) \quad (3)$$

1. 一次元波動方程式— 1.1 方程式の導出

各点での張力はその点での弦の接線方向を向いているので $\tan \theta(x + \Delta x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x)$,

$\tan \theta(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x)$ 従って (2) は次のように変形される

$$\frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right)$$

ここで $\Delta x \rightarrow 0$ の極限をとると (一次元) 波動方程式とよばれる偏微分方程式が得られる.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left(c^2 = \frac{T}{\rho} > 0 \right) \quad (3)$$

- 無限に長い弦を考え, $-\infty < x < +\infty$ における初期条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

を与えて, $t > 0$ に対する (3) の解 $u(x, t)$ を求める問題を初期値問題とよぶ.

1. 一次元波動方程式— 1.1 方程式の導出

各点での張力はその点での弦の接線方向を向いているので $\tan \theta(x + \Delta x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x)$,

$\tan \theta(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x)$ 従って (2) は次のように変形される

$$\frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(x) \right)$$

ここで $\Delta x \rightarrow 0$ の極限をとると (一次元) 波動方程式とよばれる偏微分方程式が得られる.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left(c^2 = \frac{T}{\rho} > 0 \right) \quad (3)$$

- 無限に長い弦を考え, $-\infty < x < +\infty$ における初期条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

を与えて, $t > 0$ に対する (3) の解 $u(x, t)$ を求める問題を初期値問題とよぶ.

- 有限の長さの弦を考え, $0 < x < l$ における初期条件と $t > 0$ における弦の両端における境界条件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (\text{弦の両端が固定されている場合})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0 \quad (\text{弦の端が上下に自由に動ける場合})$$

を与えて, $t > 0$ に対する (3) の解 $u(x, t)$ を求める問題を初期値-境界値問題とよぶ.

1. 一次元波動方程式— 1.2 無限区間における初期値問題

1. 一次元波動方程式— 1.2 無限区間における初期値問題

以下では無限に長い弦を考え, $-\infty < x < +\infty$ における波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (c > 0) \quad (4)$$

の初期条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (5)$$

の下での初期値問題を考える.

1. 一次元波動方程式— 1.2 無限区間における初期値問題

以下では無限に長い弦を考え, $-\infty < x < +\infty$ における波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (c > 0) \quad (4)$$

の初期条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (5)$$

の下での初期値問題を考える.

$\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$ において u を ξ , η の関数 $u = u(\xi, \eta)$ と考える.

1. 一次元波動方程式— 1.2 無限区間における初期値問題

以下では無限に長い弦を考え, $-\infty < x < +\infty$ における波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (c > 0) \quad (4)$$

の初期条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (5)$$

の下での初期値問題を考える.

$\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$ において u を ξ , η の関数 $u = u(\xi, \eta)$ と考える.

このとき, 二変数関数の連鎖律より,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial \xi} - c \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

1. 一次元波動方程式— 1.2 無限区間における初期値問題

以下では無限に長い弦を考え, $-\infty < x < +\infty$ における波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (c > 0) \quad (4)$$

の初期条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (5)$$

の下での初期値問題を考える.

$\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$ において u を ξ , η の関数 $u = u(\xi, \eta)$ と考える.

このとき, 二変数関数の連鎖律より,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial \xi} - c \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

同様にして

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

1. 一次元波動方程式— 1.2 無限区間における初期値問題

以下では無限に長い弦を考え, $-\infty < x < +\infty$ における波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (c > 0) \quad (4)$$

の初期条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (5)$$

の下での初期値問題を考える.

$\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$ において u を ξ , η の関数 $u = u(\xi, \eta)$ と考える.

このとき, 二変数関数の連鎖律より,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial \xi} - c \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

同様にして

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

これを (4) に代入すると

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

1. 一次元波動方程式— 1.2 無限区間における初期値問題

以下では無限に長い弦を考え, $-\infty < x < +\infty$ における波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (c > 0) \quad (4)$$

の初期条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (5)$$

の下での初期値問題を考える.

$\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$ において u を ξ , η の関数 $u = u(\xi, \eta)$ と考える.

このとき, 二変数関数の連鎖律より,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial \xi} - c \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

同様にして

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

これを (4) に代入すると

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\therefore 4c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad i.e. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

1. 一次元波動方程式— 1.2 無限区間における初期値問題

従って (4) の解は, 先ず ξ で積分して

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \int \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} d\xi = \varphi(\eta) \quad \text{但し } \varphi(\eta) \text{ は任意の関数}$$

1. 一次元波動方程式— 1.2 無限区間における初期値問題

従って (4) の解は, 先ず ξ で積分して

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \int \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} d\xi = \varphi(\eta) \quad \text{但し } \varphi(\eta) \text{ は任意の関数}$$

更にこれを η で積分して

$$u(\xi, \eta) = \int \varphi(\eta) d\eta = \phi(\eta) + \psi(\xi) \quad \text{但し } \phi(\eta) \text{ は } \varphi(\eta) \text{ の原始関数で } \psi(\xi) \text{ は任意の関数}$$

1. 一次元波動方程式— 1.2 無限区間における初期値問題

従って (4) の解は, 先ず ξ で積分して

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \int \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} d\xi = \varphi(\eta) \quad \text{但し } \varphi(\eta) \text{ は任意の関数}$$

更にこれを η で積分して

$$u(\xi, \eta) = \int \varphi(\eta) d\eta = \phi(\eta) + \psi(\xi) \quad \text{但し } \phi(\eta) \text{ は } \varphi(\eta) \text{ の原始関数で } \psi(\xi) \text{ は任意の関数}$$

変数を x, t に戻すと

$$u(x, t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct) \quad (6)$$

1. 一次元波動方程式— 1.2 無限区間における初期値問題

従って (4) の解は, 先ず ξ で積分して

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \int \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} d\xi = \varphi(\eta) \quad \text{但し } \varphi(\eta) \text{ は任意の関数}$$

更にこれを η で積分して

$$u(\xi, \eta) = \int \varphi(\eta) d\eta = \phi(\eta) + \psi(\xi) \quad \text{但し } \phi(\eta) \text{ は } \varphi(\eta) \text{ の原始関数で } \psi(\xi) \text{ は任意の関数}$$

変数を x, t に戻すと

$$u(x, t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct) \quad (6)$$

これに初期条件 (5) を代入すると

$$u(x, 0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -c\phi'(x) + c\psi'(x) = g(x)$$

1. 一次元波動方程式— 1.2 無限区間における初期値問題

従って (4) の解は, 先ず ξ で積分して

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \int \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} d\xi = \varphi(\eta) \quad \text{但し } \varphi(\eta) \text{ は任意の関数}$$

更にこれを η で積分して

$$u(\xi, \eta) = \int \varphi(\eta) d\eta = \phi(\eta) + \psi(\xi) \quad \text{但し } \phi(\eta) \text{ は } \varphi(\eta) \text{ の原始関数で } \psi(\xi) \text{ は任意の関数}$$

変数を x, t に戻すと

$$u(x, t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct) \quad (6)$$

これに初期条件 (5) を代入すると

$$u(x, 0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -c\phi'(x) + c\psi'(x) = g(x)$$

第二式より

$$-\phi(x) + \psi(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g(s) ds + (-\phi(x_0) + \psi(x_0))$$

1. 一次元波動方程式— 1.2 無限区間における初期値問題

従って (4) の解は, 先ず ξ で積分して

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \int \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} d\xi = \varphi(\eta) \quad \text{但し } \varphi(\eta) \text{ は任意の関数}$$

更にこれを η で積分して

$$u(\xi, \eta) = \int \varphi(\eta) d\eta = \phi(\eta) + \psi(\xi) \quad \text{但し } \phi(\eta) \text{ は } \varphi(\eta) \text{ の原始関数で } \psi(\xi) \text{ は任意の関数}$$

変数を x, t に戻すと

$$u(x, t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct) \quad (6)$$

これに初期条件 (5) を代入すると

$$u(x, 0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -c\phi'(x) + c\psi'(x) = g(x)$$

第二式より

$$-\phi(x) + \psi(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g(s) ds + (-\phi(x_0) + \psi(x_0))$$

よって第一式を用いて

$$\phi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(s) ds + \frac{\phi(x_0) - \psi(x_0)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(s) ds - \frac{\phi(x_0) - \psi(x_0)}{2}$$

1. 一次元波動方程式— 1.2 無限区間における初期値問題

従って (4) の解は, 先ず ξ で積分して

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \int \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} d\xi = \varphi(\eta) \quad \text{但し } \varphi(\eta) \text{ は任意の関数}$$

更にこれを η で積分して

$$u(\xi, \eta) = \int \varphi(\eta) d\eta = \phi(\eta) + \psi(\xi) \quad \text{但し } \phi(\eta) \text{ は } \varphi(\eta) \text{ の原始関数で } \psi(\xi) \text{ は任意の関数}$$

変数を x, t に戻すと

$$u(x, t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct) \quad (6)$$

これに初期条件 (5) を代入すると

$$u(x, 0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -c\phi'(x) + c\psi'(x) = g(x)$$

第二式より

$$-\phi(x) + \psi(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g(s) ds + (-\phi(x_0) + \psi(x_0))$$

よって第一式を用いて

$$\phi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(s) ds + \frac{\phi(x_0) - \psi(x_0)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(s) ds - \frac{\phi(x_0) - \psi(x_0)}{2}$$

以上より (6) から

$$u(x, t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct) = \frac{1}{2} (f(x - ct) + f(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

1. 一次元波動方程式— 1.2 無限区間における初期値問題

従って (4) の解は, 先ず ξ で積分して

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \int \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} d\xi = \varphi(\eta) \quad \text{但し } \varphi(\eta) \text{ は任意の関数}$$

更にこれを η で積分して

$$u(\xi, \eta) = \int \varphi(\eta) d\eta = \phi(\eta) + \psi(\xi) \quad \text{但し } \phi(\eta) \text{ は } \varphi(\eta) \text{ の原始関数で } \psi(\xi) \text{ は任意の関数}$$

変数を x, t に戻すと

$$u(x, t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct) \quad (6)$$

これに初期条件 (5) を代入すると

$$u(x, 0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -c\phi'(x) + c\psi'(x) = g(x)$$

第二式より

$$-\phi(x) + \psi(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g(s) ds + (-\phi(x_0) + \psi(x_0))$$

よって第一式を用いて

$$\phi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(s) ds + \frac{\phi(x_0) - \psi(x_0)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x g(s) ds - \frac{\phi(x_0) - \psi(x_0)}{2}$$

以上より (6) から

$$u(x, t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct) = \frac{1}{2} (f(x - ct) + f(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

これをダランベールの解 (又はストークスの解) とよぶ.

1. 一次元波動方程式— 1.2 無限区間における初期値問題

[注意]

波動方程式 (4) の解が $u(x, t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct)$ と書けるということは,
 $u(x, t)$ は

1. 一次元波動方程式— 1.2 無限区間における初期値問題

[注意]

波動方程式 (4) の解が $u(x, t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct)$ と書けるということは,
 $u(x, t)$ は右向きに進む波 $\phi(x - ct)$ と

1. 一次元波動方程式— 1.2 無限区間における初期値問題

[注意]

波動方程式 (4) の解が $u(x, t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct)$ と書けるということは,
 $u(x, t)$ は右向きに進む波 $\phi(x - ct)$ と左向きに進む波 $\psi(x + ct)$

1. 一次元波動方程式— 1.2 無限区間における初期値問題

[注意]

波動方程式 (4) の解が $u(x, t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct)$ と書けるということは, $u(x, t)$ は右向きに進む波 $\phi(x - ct)$ と左向きに進む波 $\psi(x + ct)$ を足し合わせたものである, ということを示している.

1. 一次元波動方程式— 1.2 無限区間における初期値問題

[注意]

波動方程式 (4) の解が $u(x, t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct)$ と書けるということは, $u(x, t)$ は右向きに進む波 $\phi(x - ct)$ と左向きに進む波 $\psi(x + ct)$ を足し合わせたものである, ということを示している.

[練習問題]

無限区間における一次元波動方程式

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (-\infty < x < +\infty, t > 0)$$

を初期条件

$$u(x, 0) = e^{-x^2}, \quad u_t(x, 0) = 0$$

の下で解け.

1. 一次元波動方程式— 1.2 無限区間における初期値問題

[注意]

波動方程式 (4) の解が $u(x, t) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct)$ と書けるということは, $u(x, t)$ は右向きに進む波 $\phi(x - ct)$ と左向きに進む波 $\psi(x + ct)$ を足し合わせたものである, ということを示している.

[練習問題]

無限区間における一次元波動方程式

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (-\infty < x < +\infty, t > 0)$$

を初期条件

$$u(x, 0) = e^{-x^2}, \quad u_t(x, 0) = 0$$

の下で解け.

[解答]

ダランベールの公式より

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{ e^{-(x-ct)^2} + e^{-(x+ct)^2} \}$$

1. 一次元波動方程式— 1.3 有限区間における初期値-境界値問題

1. 一次元波動方程式— 1.3 有限区間における初期値-境界値問題

以下では長さ $0 < l < +\infty$ の弦を考え, $0 < x < l$ における波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (c > 0) \quad (7)$$

の境界条件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (8)$$

及び初期条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (9)$$

の下での初期値-境界値問題を考える.

1. 一次元波動方程式— 1.3 有限区間における初期値-境界値問題

以下では長さ $0 < l < +\infty$ の弦を考え, $0 < x < l$ における波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (c > 0) \quad (7)$$

の境界条件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (8)$$

及び初期条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (9)$$

の下での初期値-境界値問題を考える.

この方程式の解が $u(x, t) = F(x)G(t)$ の形 (変数分離形) をしていると仮定する.

1. 一次元波動方程式— 1.3 有限区間における初期値-境界値問題

以下では長さ $0 < l < +\infty$ の弦を考え, $0 < x < l$ における波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (c > 0) \quad (7)$$

の境界条件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (8)$$

及び初期条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (9)$$

の下での初期値-境界値問題を考える.

この方程式の解が $u(x, t) = F(x)G(t)$ の形 (変数分離形) をしていると仮定する. このとき

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x)G''(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)G(t)$$

1. 一次元波動方程式— 1.3 有限区間における初期値-境界値問題

以下では長さ $0 < l < +\infty$ の弦を考え, $0 < x < l$ における波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (c > 0) \quad (7)$$

の境界条件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (8)$$

及び初期条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (9)$$

の下での初期値-境界値問題を考える.

この方程式の解が $u(x, t) = F(x)G(t)$ の形 (変数分離形) をしていると仮定する. このとき

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x)G''(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)G(t)$$

これを (7) に代入すると,

$$F(x)G''(t) = c^2 F''(x)G(t)$$

1. 一次元波動方程式— 1.3 有限区間における初期値-境界値問題

以下では長さ $0 < l < +\infty$ の弦を考え, $0 < x < l$ における波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (c > 0) \quad (7)$$

の境界条件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (8)$$

及び初期条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (9)$$

の下での初期値-境界値問題を考える.

この方程式の解が $u(x, t) = F(x)G(t)$ の形 (変数分離形) をしていると仮定する. このとき

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x)G''(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)G(t)$$

これを (7) に代入すると,

$$F(x)G''(t) = c^2 F''(x)G(t)$$

この両辺を $c^2 F(x)G(t)$ で割ると

$$\frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}$$

1. 一次元波動方程式— 1.3 有限区間における初期値-境界値問題

以下では長さ $0 < l < +\infty$ の弦を考え, $0 < x < l$ における波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (c > 0) \quad (7)$$

の境界条件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (8)$$

及び初期条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (9)$$

の下での初期値-境界値問題を考える.

この方程式の解が $u(x, t) = F(x)G(t)$ の形 (変数分離形) をしていると仮定する. このとき

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x)G''(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)G(t)$$

これを (7) に代入すると,

$$F(x)G''(t) = c^2 F''(x)G(t)$$

この両辺を $c^2 F(x)G(t)$ で割ると

$$\frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}$$

上式の左辺は t のみの関数で右辺は x のみの関数なので, 両辺とも定数でなければならない. 従って次の二つの常微分方程式を得る

1. 一次元波動方程式— 1.3 有限区間における初期値-境界値問題

以下では長さ $0 < l < +\infty$ の弦を考え, $0 < x < l$ における波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (c > 0) \quad (7)$$

の境界条件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (8)$$

及び初期条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (9)$$

の下での初期値-境界値問題を考える.

この方程式の解が $u(x, t) = F(x)G(t)$ の形 (変数分離形) をしていると仮定する. このとき

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x)G''(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)G(t)$$

これを (7) に代入すると,

$$F(x)G''(t) = c^2 F''(x)G(t)$$

この両辺を $c^2 F(x)G(t)$ で割ると

$$\frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}$$

上式の左辺は t のみの関数で右辺は x のみの関数なので, 両辺とも定数でなければならない. 従って次の二つの常微分方程式を得る

$$F'' = kF, \quad G'' = c^2 kG \quad (\text{但し } k \text{ は定数})$$

1. 一次元波動方程式— 1.3 有限区間における初期値-境界値問題

ここで $u(x, t) = F(x)G(t)$ が境界条件 (8) を満たすためには,

$$F(0) = F(l) = 0 \quad (10)$$

が成り立たなくてはならない.

1. 一次元波動方程式— 1.3 有限区間における初期値-境界値問題

ここで $u(x, t) = F(x)G(t)$ が境界条件 (8) を満たすためには,

$$F(0) = F(l) = 0 \quad (10)$$

が成り立たなくてはならない.

(i) $k > 0$ のとき: $F(x)$ の方程式の一般解は $F(x) = C_1 e^{\sqrt{k}x} + C_2 e^{-\sqrt{k}x}$ なので, (10) を満たすのは $F(x) \equiv 0$ のみ.

1. 一次元波動方程式— 1.3 有限区間における初期値-境界値問題

ここで $u(x, t) = F(x)G(t)$ が境界条件 (8) を満たすためには,

$$F(0) = F(l) = 0 \quad (10)$$

が成り立たなくてはならない.

- (i) $k > 0$ のとき: $F(x)$ の方程式の一般解は $F(x) = C_1 e^{\sqrt{k}x} + C_2 e^{-\sqrt{k}x}$ なので, (10) を満たすのは $F(x) \equiv 0$ のみ.
- (ii) $k = 0$ のとき: $F(x)$ の方程式の一般解は $F(x) = C_1 x + C_2$ なので, やはり (10) を満たすのは $F(x) \equiv 0$ のみ.

1. 一次元波動方程式— 1.3 有限区間における初期値-境界値問題

ここで $u(x, t) = F(x)G(t)$ が境界条件 (8) を満たすためには,

$$F(0) = F(l) = 0 \quad (10)$$

が成り立たなくてはならない.

- (i) $k > 0$ のとき: $F(x)$ の方程式の一般解は $F(x) = C_1 e^{\sqrt{k}x} + C_2 e^{-\sqrt{k}x}$ なので, (10) を満たすのは $F(x) \equiv 0$ のみ.
- (ii) $k = 0$ のとき: $F(x)$ の方程式の一般解は $F(x) = C_1 x + C_2$ なので, やはり (10) を満たすのは $F(x) \equiv 0$ のみ.
- (iii) $k < 0$ のとき: $F(x)$ の方程式の一般解は $F(x) = C_1 \cos(\sqrt{-k}x) + C_2 \sin(\sqrt{-k}x)$ なので, (10) を満たすのは $F(x) = C \sin(\sqrt{-k}x)$ かつ $\sqrt{-k} = \frac{n\pi}{l}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

1. 一次元波動方程式— 1.3 有限区間における初期値-境界値問題

ここで $u(x, t) = F(x)G(t)$ が境界条件 (8) を満たすためには,

$$F(0) = F(l) = 0 \quad (10)$$

が成り立たなくてはならない.

(i) $k > 0$ のとき: $F(x)$ の方程式の一般解は $F(x) = C_1 e^{\sqrt{k}x} + C_2 e^{-\sqrt{k}x}$ なので, (10) を満たすのは $F(x) \equiv 0$ のみ.

(ii) $k = 0$ のとき: $F(x)$ の方程式の一般解は $F(x) = C_1 x + C_2$ なので, やはり (10) を満たすのは $F(x) \equiv 0$ のみ.

(iii) $k < 0$ のとき: $F(x)$ の方程式の一般解は $F(x) = C_1 \cos(\sqrt{-k}x) + C_2 \sin(\sqrt{-k}x)$ なので, (10) を満たすのは $F(x) = C \sin(\sqrt{-k}x)$ かつ $\sqrt{-k} = \frac{n\pi}{l}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) このとき $G(t)$ の方程式は

$$G'' = - \left(\frac{cn\pi}{l} \right)^2 G$$

となりその解は $G(t) = A_n \cos \frac{cn\pi}{l} t + B_n \sin \frac{cn\pi}{l} t$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

1. 一次元波動方程式— 1.3 有限区間における初期値-境界値問題

ここで $u(x, t) = F(x)G(t)$ が境界条件 (8) を満たすためには,

$$F(0) = F(l) = 0 \quad (10)$$

が成り立たなくてはならない.

(i) $k > 0$ のとき: $F(x)$ の方程式の一般解は $F(x) = C_1 e^{\sqrt{k}x} + C_2 e^{-\sqrt{k}x}$ なので, (10) を満たすのは $F(x) \equiv 0$ のみ.

(ii) $k = 0$ のとき: $F(x)$ の方程式の一般解は $F(x) = C_1 x + C_2$ なので, やはり (10) を満たすのは $F(x) \equiv 0$ のみ.

(iii) $k < 0$ のとき: $F(x)$ の方程式の一般解は $F(x) = C_1 \cos(\sqrt{-k}x) + C_2 \sin(\sqrt{-k}x)$ なので, (10) を満たすのは $F(x) = C \sin(\sqrt{-k}x)$ かつ $\sqrt{-k} = \frac{n\pi}{l}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) このとき $G(t)$ の方程式は

$$G'' = -\left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 G$$

となりその解は $G(t) = A_n \cos \frac{cn\pi}{l}t + B_n \sin \frac{cn\pi}{l}t$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

従って, (7) の解の列 $u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{cn\pi}{l}t + B_n \sin \frac{cn\pi}{l}t \right) \sin \frac{n\pi}{l}x$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が得られる.

1. 一次元波動方程式— 1.3 有限区間における初期値-境界値問題

ここで $u(x, t) = F(x)G(t)$ が境界条件 (8) を満たすためには,

$$F(0) = F(l) = 0 \quad (10)$$

が成り立たなくてはならない.

(i) $k > 0$ のとき: $F(x)$ の方程式の一般解は $F(x) = C_1 e^{\sqrt{k}x} + C_2 e^{-\sqrt{k}x}$ なので, (10) を満たすのは $F(x) \equiv 0$ のみ.

(ii) $k = 0$ のとき: $F(x)$ の方程式の一般解は $F(x) = C_1 x + C_2$ なので, やはり (10) を満たすのは $F(x) \equiv 0$ のみ.

(iii) $k < 0$ のとき: $F(x)$ の方程式の一般解は $F(x) = C_1 \cos(\sqrt{-k}x) + C_2 \sin(\sqrt{-k}x)$ なので, (10) を満たすのは $F(x) = C \sin(\sqrt{-k}x)$ かつ $\sqrt{-k} = \frac{n\pi}{l}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) このとき $G(t)$ の方程式は

$$G'' = -\left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 G$$

となりその解は $G(t) = A_n \cos \frac{cn\pi}{l}t + B_n \sin \frac{cn\pi}{l}t$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)
従って, (7) の解の列 $u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{cn\pi}{l}t + B_n \sin \frac{cn\pi}{l}t \right) \sin \frac{n\pi}{l}x$

($n = 1, 2, 3, \dots$) が得られる.

この $u_n(x, t)$ を波動方程式 (7) の境界条件 (8) の下での固有関数とよび,
 $\lambda_n := \frac{cn\pi}{l}$ を固有値とよぶ.

1. 一次元波動方程式— 1.3 有限区間における初期値-境界値問題

ここで $u(x, t) = F(x)G(t)$ が境界条件 (8) を満たすためには,

$$F(0) = F(l) = 0 \quad (10)$$

が成り立たなくてはならない.

(i) $k > 0$ のとき: $F(x)$ の方程式の一般解は $F(x) = C_1 e^{\sqrt{k}x} + C_2 e^{-\sqrt{k}x}$ なので, (10) を満たすのは $F(x) \equiv 0$ のみ.

(ii) $k = 0$ のとき: $F(x)$ の方程式の一般解は $F(x) = C_1 x + C_2$ なので, やはり (10) を満たすのは $F(x) \equiv 0$ のみ.

(iii) $k < 0$ のとき: $F(x)$ の方程式の一般解は $F(x) = C_1 \cos(\sqrt{-k}x) + C_2 \sin(\sqrt{-k}x)$ なので, (10) を満たすのは $F(x) = C \sin(\sqrt{-k}x)$ かつ $\sqrt{-k} = \frac{n\pi}{l}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) このとき $G(t)$ の方程式は

$$G'' = -\left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 G$$

となりその解は $G(t) = A_n \cos \frac{cn\pi}{l}t + B_n \sin \frac{cn\pi}{l}t$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

従って, (7) の解の列 $u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{cn\pi}{l}t + B_n \sin \frac{cn\pi}{l}t \right) \sin \frac{n\pi}{l}x$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が得られる.

この $u_n(x, t)$ を波動方程式 (7) の境界条件 (8) の下での固有関数とよび,

$\lambda_n := \frac{cn\pi}{l}$ を固有値とよぶ.

$u_n(x, t)$ で表される弦の振動をこの弦の第 n 標準モードとよぶこともある.

1. 一次元波動方程式— 1.3 有限区間における初期値-境界値問題

各 $u_n(x, t)$ が境界条件 (8) の下で波動方程式 (7) を満たすので、それらを足し合わせたもの

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \quad (10)$$

も (無限和が収束し, かつ微分可能ならば) 境界条件 (8) の下で波動方程式 (7) を満たす.

1. 一次元波動方程式— 1.3 有限区間における初期値-境界値問題

各 $u_n(x, t)$ が境界条件 (8) の下で波動方程式 (7) を満たすので、それらを足し合わせたもの

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \quad (10)$$

も (無限和が収束し, かつ微分可能ならば) 境界条件 (8) の下で波動方程式 (7) を満たす.
そこで (10) の形の解で初期条件 (9) を満たすものを求める.

1. 一次元波動方程式— 1.3 有限区間における初期値-境界値問題

各 $u_n(x, t)$ が境界条件 (8) の下で波動方程式 (7) を満たすので、それらを足し合わせたもの

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \quad (10)$$

も (無限和が収束し, かつ微分可能ならば) 境界条件 (8) の下で波動方程式 (7) を満たす.

そこで (10) の形の解で初期条件 (9) を満たすものを求める.

$t = 0$ を (10) に代入して

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn\pi}{l} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} = g(x)$$

1. 一次元波動方程式— 1.3 有限区間における初期値-境界値問題

各 $u_n(x, t)$ が境界条件 (8) の下で波動方程式 (7) を満たすので、それらを足し合わせたもの

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \quad (10)$$

も (無限和が収束し, かつ微分可能ならば) 境界条件 (8) の下で波動方程式 (7) を満たす. そこで (10) の形の解で初期条件 (9) を満たすものを求める.

$t = 0$ を (10) に代入して

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn\pi}{l} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} = g(x)$$

従って, フーリエ正弦展開の理論により

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi, \quad B_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l g(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi$$

として $u(x, t)$ は次の様に表される.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{cn\pi}{l} t + B_n \sin \frac{cn\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

1. 一次元波動方程式— 1.3 有限区間における初期値-境界値問題

各 $u_n(x, t)$ が境界条件 (8) の下で波動方程式 (7) を満たすので、それらを足し合わせたもの

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \quad (10)$$

も (無限和が収束し、かつ微分可能ならば) 境界条件 (8) の下で波動方程式 (7) を満たす。
そこで (10) の形の解で初期条件 (9) を満たすものを求める。

$t = 0$ を (10) に代入して

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn\pi}{l} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} = g(x)$$

従って、フーリエ正弦展開の理論により

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi, \quad B_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l g(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi$$

として $u(x, t)$ は次の様に表される。

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{cn\pi}{l} t + B_n \sin \frac{cn\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

[練習問題] 初期値が $f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{l}x & (0 < x < \frac{l}{2}) \\ \frac{2k}{l}(l-x) & (\frac{l}{2} < x < l) \end{cases}$, $g(x) \equiv 0$ の場合の解を求めよ。

1. 一次元波動方程式— 1.3 有限区間における初期値-境界値問題

各 $u_n(x, t)$ が境界条件 (8) の下で波動方程式 (7) を満たすので、それらを足し合わせたもの

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \quad (10)$$

も (無限和が収束し、かつ微分可能ならば) 境界条件 (8) の下で波動方程式 (7) を満たす。
そこで (10) の形の解で初期条件 (9) を満たすものを求める。

$t = 0$ を (10) に代入して

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cn\pi}{l} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} = g(x)$$

従って、フーリエ正弦展開の理論により

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi, \quad B_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l g(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi$$

として $u(x, t)$ は次の様に表される。

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{cn\pi}{l} t + B_n \sin \frac{cn\pi}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

[練習問題] 初期値が $f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{l}x & (0 < x < \frac{l}{2}) \\ \frac{2k}{l}(l-x) & (\frac{l}{2} < x < l) \end{cases}$, $g(x) \equiv 0$ の場合の解を求めよ。

[解答]
$$u(x, t) = \frac{8k}{\pi^2} \left(\frac{1}{12} \cos \frac{c\pi}{l} t \sin \frac{\pi}{l} x - \frac{1}{32} \cos \frac{3c\pi}{l} t \sin \frac{3\pi}{l} x + \cdots - \cdots \right)$$

1. 一次元波動方程式— 1.3 有限区間における初期値-境界値問題

次に $0 < x < l$ における波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (c > 0) \quad (11)$$

を境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0 \quad (12)$$

及び初期条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (13)$$

の下で初期値-境界値問題を考える.

1. 一次元波動方程式— 1.3 有限区間における初期値-境界値問題

次に $0 < x < l$ における波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (c > 0) \quad (11)$$

を境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0 \quad (12)$$

及び初期条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (13)$$

の下で初期値-境界値問題を考える.

この場合も境界条件が $u(0, t) = u(l, t) = 0$ の場合と同様に考えると

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0) = \frac{\partial F}{\partial x}(l) = 0$$

となり解の列 $u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{cn\pi}{l}t + B_n \sin \frac{cn\pi}{l}t \right) \cos \frac{n\pi}{l}x \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$ が得られる.

1. 一次元波動方程式— 1.3 有限区間における初期値-境界値問題

次に $0 < x < l$ における波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (c > 0) \quad (11)$$

を境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0 \quad (12)$$

及び初期条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (13)$$

の下で初期値-境界値問題を考える.

この場合も境界条件が $u(0, t) = u(l, t) = 0$ の場合と同様に考えると

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0) = \frac{\partial F}{\partial x}(l) = 0$$

となり解の列 $u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{cn\pi}{l}t + B_n \sin \frac{cn\pi}{l}t \right) \cos \frac{n\pi}{l}x \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$

が得られる. 従ってフーリエ余弦展開の理論により

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(\xi) d\xi, \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \cos \frac{n\pi\xi}{l} d\xi, \quad B_0 = \frac{1}{l} \int_0^l g(\xi) d\xi, \quad B_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^l g(\xi) \cos \frac{n\pi\xi}{l} \xi d\xi$$

として $u(x, t)$ は次の様に表される.

$$u(x, t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{cn\pi}{l}t + B_n \sin \frac{cn\pi}{l}t \right) \cos \frac{n\pi}{l}x$$

2. 一次元熱方程式

2. 一次元熱方程式— 2.1 方程式の導出

2. 一次元熱方程式— 2.1 方程式の導出

単位長さあたりの質量 $\rho > 0$ 比熱 $\gamma > 0$ 及び熱伝導率 $k > 0$ が位置によらず一定の針金を熱が伝わるとする. 更に熱は針金の外には出ないとする.

2. 一次元熱方程式— 2.1 方程式の導出

単位長さあたりの質量 $\rho > 0$ 比熱 $\gamma > 0$ 及び熱伝導率 $k > 0$ が位置によらず一定の針金を熱が伝わるとする. 更に熱は針金の外には出ないとする.

(一次元) 空間 or 長さに対応する変数を x とし, 時間に対応する変数を t として針金の各 (x, t) における温度を未知関数 $u(x, t)$ よって表すことにする.

2. 一次元熱方程式— 2.1 方程式の導出

単位長さあたりの質量 $\rho > 0$ 比熱 $\gamma > 0$ 及び熱伝導率 $k > 0$ が位置によらず一定の針金を熱が伝わるとする. 更に熱は針金の外には出ないとする.

(一次元) 空間 or 長さに対応する変数を x とし, 時間に対応する変数を t として針金の各 (x, t) における温度を未知関数 $u(x, t)$ よって表すことにする.

微小区間 $[x, x + \Delta x]$ について時刻 t から $t + \Delta t$ の間にその端点から出入する熱量を考え
ると, 熱は温度の高い方から低い方に向かってそこでの温度の傾きに比例して伝わるので,

2. 一次元熱方程式— 2.1 方程式の導出

単位長さあたりの質量 $\rho > 0$ 比熱 $\gamma > 0$ 及び熱伝導率 $k > 0$ が位置によらず一定の針金を熱が伝わるとする. 更に熱は針金の外には出ないとする.

(一次元) 空間 or 長さに対応する変数を x とし, 時間に対応する変数を t として針金の各 (x, t) における温度を未知関数 $u(x, t)$ よって表すことにする.

微小区間 $[x, x + \Delta x]$ について時刻 t から $t + \Delta t$ の間にその端点から出入する熱量を考えると, 熱は温度の高い方から低い方に向かってそこでの温度の傾きに比例して伝わるので, 点 x 及び $x + \Delta x$ を右に向かって通過する熱量はそれぞれ

$$-k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \Delta t, \quad -k \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) \Delta t$$

で与えられる.

2. 一次元熱方程式— 2.1 方程式の導出

単位長さあたりの質量 $\rho > 0$ 比熱 $\gamma > 0$ 及び熱伝導率 $k > 0$ が位置によらず一定の針金を熱が伝わるとする. 更に熱は針金の外には出ないとする.

(一次元) 空間 or 長さに対応する変数を x とし, 時間に対応する変数を t として針金の各 (x, t) における温度を未知関数 $u(x, t)$ よって表すことにする.

微小区間 $[x, x + \Delta x]$ について時刻 t から $t + \Delta t$ の間にその端点から出入する熱量を考え
ると, 熱は温度の高い方から低い方に向かってそこでの温度の傾きに比例して伝わるので,
点 x 及び $x + \Delta x$ を右に向かって通過する熱量はそれぞれ

$$-k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \Delta t, \quad -k \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) \Delta t$$

で与えられる. 従ってこの微小区間の持つ熱量の微小時間 Δt の間の増加量は

$$\left(k \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) \Delta t$$

となる.

2. 一次元熱方程式— 2.1 方程式の導出

単位長さあたりの質量 $\rho > 0$ 比熱 $\gamma > 0$ 及び熱伝導率 $k > 0$ が位置によらず一定の針金を熱が伝わるとする. 更に熱は針金の外には出ないとする.

(一次元) 空間 or 長さに対応する変数を x とし, 時間に対応する変数を t として針金の各 (x, t) における温度を未知関数 $u(x, t)$ よって表すことにする.

微小区間 $[x, x + \Delta x]$ について時刻 t から $t + \Delta t$ の間にその端点から出入する熱量を考え
ると, 熱は温度の高い方から低い方に向かってそこでの温度の傾きに比例して伝わるので,
点 x 及び $x + \Delta x$ を右に向かって通過する熱量はそれぞれ

$$-k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \Delta t, \quad -k \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) \Delta t$$

で与えられる. 従ってこの微小区間の持つ熱量の微小時間 Δt の間の増加量は

$$\left(k \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) \Delta t$$

となる.

次に, 時刻 t においてこの微小区間の温度が $u(x, t)$ であったものが, 微小時間 Δt 後に
 $u(x, t + \Delta t)$ になったとすると, その温度変化に要した熱量は

$$\gamma \rho \Delta x (u(x, t + \Delta t) - u(x, t))$$

であるはずである.

2. 一次元熱方程式— 2.1 方程式の導出

単位長さあたりの質量 $\rho > 0$ 比熱 $\gamma > 0$ 及び熱伝導率 $k > 0$ が位置によらず一定の針金を熱が伝わるとする. 更に熱は針金の外には出ないとする.

(一次元) 空間 or 長さに対応する変数を x とし, 時間に対応する変数を t として針金の各 (x, t) における温度を未知関数 $u(x, t)$ よって表すことにする.

微小区間 $[x, x + \Delta x]$ について時刻 t から $t + \Delta t$ の間にその端点から出入する熱量を考え
ると, 熱は温度の高い方から低い方に向かってそこでの温度の傾きに比例して伝わるので,
点 x 及び $x + \Delta x$ を右に向かって通過する熱量はそれぞれ

$$-k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \Delta t, \quad -k \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) \Delta t$$

で与えられる. 従ってこの微小区間の持つ熱量の微小時間 Δt の間の増加量は

$$\left(k \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) \Delta t$$

となる.

次に, 時刻 t においてこの微小区間の温度が $u(x, t)$ であったものが, 微小時間 Δt 後に $u(x, t + \Delta t)$ になったとすると, その温度変化に要した熱量は

$$\gamma \rho \Delta x (u(x, t + \Delta t) - u(x, t))$$

であるはずである. 上の二つは等しいはずなので次の等式が成り立つ

$$\gamma \rho \Delta x (u(x, t + \Delta t) - u(x, t)) = k \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) \Delta t$$

2. 一次元熱方程式— 2.1 方程式の導出

従って両辺を $\Delta t \Delta x$ で割って

$$\gamma \rho \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = k \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)}{\Delta x}$$

2. 一次元熱方程式— 2.1 方程式の導出

従って両辺を $\Delta t \Delta x$ で割って

$$\gamma \rho \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = k \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)}{\Delta x}$$

$\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ の極限をとると (一次元) 熱方程式とよばれる偏微分方程式が得られる.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left(\kappa = \frac{k}{\gamma \rho} > 0 \right) \quad (14)$$

(κ は熱拡散率とよばれる)

2. 一次元熱方程式— 2.1 方程式の導出

従って両辺を $\Delta t \Delta x$ で割って

$$\gamma \rho \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = k \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)}{\Delta x}$$

$\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ の極限をとると (一次元) 熱方程式とよばれる偏微分方程式が得られる.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left(\kappa = \frac{k}{\gamma \rho} > 0 \right) \quad (14)$$

(κ は熱拡散率とよばれる)

- 無限に長い針金を考え, $-\infty < x < +\infty$ における初期条件

$$u(x, 0) = f(x)$$

を与えて, $t > 0$ に対する (14) の解 $u(x, t)$ を求める問題を初期値問題とよぶ.

2. 一次元熱方程式— 2.1 方程式の導出

従って両辺を $\Delta t \Delta x$ で割って

$$\gamma \rho \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = k \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)}{\Delta x}$$

$\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ の極限をとると (一次元) 熱方程式とよばれる偏微分方程式が得られる.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left(\kappa = \frac{k}{\gamma \rho} > 0 \right) \quad (14)$$

(κ は熱拡散率とよばれる)

- 無限に長い針金を考え, $-\infty < x < +\infty$ における初期条件

$$u(x, 0) = f(x)$$

を与えて, $t > 0$ に対する (14) の解 $u(x, t)$ を求める問題を初期値問題とよぶ.

- 有限の長さの針金を考え, $0 < x < l$ における初期条件と $t > 0$ における弦の両端における境界条件

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(l, t) &= 0 && \text{(針金の両端の温度が一定の場合)} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) &= 0 && \text{(針金の両端からの熱の出入りが無い場合)} \end{aligned}$$

を与えて, $t > 0$ に対する (14) の解 $u(x, t)$ を求める問題を初期値-境界値問題とよぶ.

2. 一次元熱方程式— 2.2 無限区間における初期値問題

2. 一次元熱方程式— 2.2 無限区間における初期値問題

以下では無限に長い針金を考え, $-\infty < x < +\infty$ における熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\kappa > 0) \quad (15)$$

の初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \quad (16)$$

の下での初期値問題を考える.

2. 一次元熱方程式— 2.2 無限区間における初期値問題

以下では無限に長い針金を考え、 $-\infty < x < +\infty$ における熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\kappa > 0) \quad (15)$$

の初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \quad (16)$$

の下での初期値問題を考える．ここで唐突ではあるがガウス核 (或は熱核) とよばれる次の関数を考える

$$G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right)$$

2. 一次元熱方程式— 2.2 無限区間における初期値問題

以下では無限に長い針金を考え、 $-\infty < x < +\infty$ における熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\kappa > 0) \quad (15)$$

の初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \quad (16)$$

の下での初期値問題を考える. ここで唐突ではあるがガウス核 (或は熱核) とよばれる次の関数を考える

$$G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right)$$

この関数を用いて

$$u(x, t) := (G_t * f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4\kappa t}\right) d\xi$$

と定めると, $u(x, t)$ は (15) を満たす.

2. 一次元熱方程式— 2.2 無限区間における初期値問題

以下では無限に長い針金を考え, $-\infty < x < +\infty$ における熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\kappa > 0) \quad (15)$$

の初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \quad (16)$$

の下での初期値問題を考える. ここで唐突ではあるがガウス核 (或は熱核) とよばれる次の関数を考える

$$G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right)$$

この関数を用いて

$$u(x, t) := (G_t * f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}\right) d\xi$$

と定めると, $u(x, t)$ は (15) を満たす.

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} \frac{-t^{-\frac{3}{2}}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}} d\xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}} \frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t^2} d\xi$$

2. 一次元熱方程式— 2.2 無限区間における初期値問題

以下では無限に長い針金を考え, $-\infty < x < +\infty$ における熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\kappa > 0) \quad (15)$$

の初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \quad (16)$$

の下での初期値問題を考える. ここで唐突ではあるがガウス核 (或は熱核) とよばれる次の関数を考える

$$G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right)$$

この関数を用いて

$$u(x, t) := (G_t * f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}\right) d\xi$$

と定めると, $u(x, t)$ は (15) を満たす.

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} \frac{-t^{-\frac{3}{2}}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}} d\xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}} \frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t^2} d\xi$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}} \frac{-2(x-\xi)}{4\kappa t} d\xi$$

2. 一次元熱方程式— 2.2 無限区間における初期値問題

以下では無限に長い針金を考え、 $-\infty < x < +\infty$ における熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\kappa > 0) \quad (15)$$

の初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \quad (16)$$

の下での初期値問題を考える. ここで唐突ではあるがガウス核 (或は熱核) とよばれる次の関数を考える

$$G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right)$$

この関数を用いて

$$u(x, t) := (G_t * f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}\right) d\xi$$

と定めると, $u(x, t)$ は (15) を満たす.

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} \frac{-t^{-\frac{3}{2}}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}} d\xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}} \frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t^2} d\xi$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}} \frac{-2(x-\xi)}{4\kappa t} d\xi$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}} \frac{2^2(x-\xi)^2}{4^2\kappa^2 t^2} d\xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}} \frac{-2}{4\kappa t} d\xi$$

2. 一次元熱方程式— 2.2 無限区間における初期値問題

また

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = f(x)$$

も成り立つが詳細は略す.

2. 一次元熱方程式— 2.2 無限区間における初期値問題

また

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = f(x)$$

も成り立つが詳細は略す.

[練習問題] 無限区間 $-\infty < x < +\infty$ における熱方程式 (15) を次の初期値の下で解け.

(1) $u(x, 0) = e^{-x^2}$

(2) $u(x, 0) = \begin{cases} 1 & (|x| < l) \\ 0 & (|x| > l) \end{cases}$

2. 一次元熱方程式— 2.2 無限区間における初期値問題

また

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = f(x)$$

も成り立つが詳細は略す.

[練習問題] 無限区間 $-\infty < x < +\infty$ における熱方程式 (15) を次の初期値の下で解け.

(1) $u(x, 0) = e^{-x^2}$

(2) $u(x, 0) = \begin{cases} 1 & (|x| < l) \\ 0 & (|x| > l) \end{cases}$

[解答]

(1) $u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}\right) d\xi$

2. 一次元熱方程式— 2.2 無限区間における初期値問題

また

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = f(x)$$

も成り立つが詳細は略す.

[練習問題] 無限区間 $-\infty < x < +\infty$ における熱方程式 (15) を次の初期値の下で解け.

(1) $u(x, 0) = e^{-x^2}$

(2) $u(x, 0) = \begin{cases} 1 & (|x| < l) \\ 0 & (|x| > l) \end{cases}$

[解答]

$$\begin{aligned} (1) \quad u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}\right) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{\left(\sqrt{1+4\kappa t}\xi - \frac{x}{\sqrt{1+4\kappa t}}\right)^2}{4\kappa t} - \frac{x^2}{1+4\kappa t}\right\} d\xi \end{aligned}$$

2. 一次元熱方程式— 2.2 無限区間における初期値問題

また

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = f(x)$$

も成り立つが詳細は略す.

[練習問題] 無限区間 $-\infty < x < +\infty$ における熱方程式 (15) を次の初期値の下で解け.

(1) $u(x, 0) = e^{-x^2}$

(2) $u(x, 0) = \begin{cases} 1 & (|x| < l) \\ 0 & (|x| > l) \end{cases}$

[解答]

$$\begin{aligned} (1) \quad u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}\right) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{\left(\sqrt{1+4\kappa t}\xi - \frac{x}{\sqrt{1+4\kappa t}}\right)^2}{4\kappa t} - \frac{x^2}{1+4\kappa t}\right\} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1+4\kappa t}} \exp\left(-\frac{x^2}{1+4\kappa t}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{1}{\sqrt{1+4\kappa t}} \exp\left(-\frac{x^2}{1+4\kappa t}\right) \end{aligned}$$

2. 一次元熱方程式— 2.2 無限区間における初期値問題

また

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = f(x)$$

も成り立つが詳細は略す.

[練習問題] 無限区間 $-\infty < x < +\infty$ における熱方程式 (15) を次の初期値の下で解け.

(1) $u(x, 0) = e^{-x^2}$

(2) $u(x, 0) = \begin{cases} 1 & (|x| < l) \\ 0 & (|x| > l) \end{cases}$

[解答]

$$\begin{aligned} (1) \quad u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa t}\right) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{\left(\sqrt{1+4\kappa t}\xi - \frac{x}{\sqrt{1+4\kappa t}}\right)^2}{4\kappa t} - \frac{x^2}{1+4\kappa t}\right\} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1+4\kappa t}} \exp\left(-\frac{x^2}{1+4\kappa t}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{1}{\sqrt{1+4\kappa t}} \exp\left(-\frac{x^2}{1+4\kappa t}\right) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \operatorname{erf} x := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad \text{として} \quad u(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{x+l}{2\sqrt{\kappa t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-l}{2\sqrt{\kappa t}}\right) \right\}$$

2. 一次熱方程式— 2.3 有限区間における初期値-境界値問題

2. 一次熱方程式— 2.3 有限区間における初期値-境界値問題

以下では長さ $0 < l < +\infty$ の針金を考え, $0 < x < l$ における熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\kappa > 0) \quad (17)$$

の境界条件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (18)$$

及び初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \quad (19)$$

の下での初期値-境界値問題を考える.

2. 一次熱方程式— 2.3 有限区間における初期値-境界値問題

以下では長さ $0 < l < +\infty$ の針金を考え, $0 < x < l$ における熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\kappa > 0) \quad (17)$$

の境界条件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (18)$$

及び初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \quad (19)$$

の下での初期値-境界値問題を考える.

波動方程式と同様に, 解が $u(x, t) = F(x)G(t)$ の形をしていると仮定する.

2. 一次熱方程式— 2.3 有限区間における初期値-境界値問題

以下では長さ $0 < l < +\infty$ の針金を考え, $0 < x < l$ における熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\kappa > 0) \quad (17)$$

の境界条件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (18)$$

及び初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \quad (19)$$

の下での初期値-境界値問題を考える.

波動方程式と同様に, 解が $u(x, t) = F(x)G(t)$ の形をしていると仮定する. このとき

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(x)G'(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)G(t)$$

2. 一次熱方程式— 2.3 有限区間における初期値-境界値問題

以下では長さ $0 < l < +\infty$ の針金を考え, $0 < x < l$ における熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\kappa > 0) \quad (17)$$

の境界条件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (18)$$

及び初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \quad (19)$$

の下での初期値-境界値問題を考える.

波動方程式と同様に, 解が $u(x, t) = F(x)G(t)$ の形をしていると仮定する. このとき

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(x)G'(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)G(t)$$

これを (17) に代入すると,

$$F(x)G'(t) = \kappa F''(x)G(t)$$

2. 一次熱方程式— 2.3 有限区間における初期値-境界値問題

以下では長さ $0 < l < +\infty$ の針金を考え, $0 < x < l$ における熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\kappa > 0) \quad (17)$$

の境界条件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (18)$$

及び初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \quad (19)$$

の下での初期値-境界値問題を考える.

波動方程式と同様に, 解が $u(x, t) = F(x)G(t)$ の形をしていると仮定する. このとき

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(x)G'(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)G(t)$$

これを (17) に代入すると,

$$F(x)G'(t) = \kappa F''(x)G(t)$$

この両辺を $\kappa F(x)G(t)$ で割ると

$$\frac{G'(t)}{\kappa G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}$$

2. 一次熱方程式— 2.3 有限区間における初期値-境界値問題

以下では長さ $0 < l < +\infty$ の針金を考え, $0 < x < l$ における熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\kappa > 0) \quad (17)$$

の境界条件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (18)$$

及び初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \quad (19)$$

の下での初期値-境界値問題を考える.

波動方程式と同様に, 解が $u(x, t) = F(x)G(t)$ の形をしていると仮定する. このとき

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(x)G'(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)G(t)$$

これを (17) に代入すると,

$$F(x)G'(t) = \kappa F''(x)G(t)$$

この両辺を $\kappa F(x)G(t)$ で割ると

$$\frac{G'(t)}{\kappa G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}$$

上式の左辺は t のみの関数で右辺は x のみの関数なので, 両辺とも定数でなければならない. 従って次の二つの常微分方程式を得る

2. 一次熱方程式— 2.3 有限区間における初期値-境界値問題

以下では長さ $0 < l < +\infty$ の針金を考え, $0 < x < l$ における熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\kappa > 0) \quad (17)$$

の境界条件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (18)$$

及び初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \quad (19)$$

の下での初期値-境界値問題を考える.

波動方程式と同様に, 解が $u(x, t) = F(x)G(t)$ の形をしていると仮定する. このとき

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(x)G'(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)G(t)$$

これを (17) に代入すると,

$$F(x)G'(t) = \kappa F''(x)G(t)$$

この両辺を $\kappa F(x)G(t)$ で割ると

$$\frac{G'(t)}{\kappa G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}$$

上式の左辺は t のみの関数で右辺は x のみの関数なので, 両辺とも定数でなければならない. 従って次の二つの常微分方程式を得る

$$F'' = kF, \quad G' = \kappa kG \quad (\text{但し } k \text{ は定数})$$

2. 一次元熱方程式— 2.3 有限区間における初期値-境界値問題

ここで $u(x, t) = F(x)G(t)$ が境界条件 (18) を満たすためには, やはり

$$F(0) = F(l) = 0 \quad (20)$$

が成り立たなくてはならない.

2. 一次元熱方程式— 2.3 有限区間における初期値-境界値問題

ここで $u(x, t) = F(x)G(t)$ が境界条件 (18) を満たすためには, やはり

$$F(0) = F(l) = 0 \quad (20)$$

が成り立たなくてはならない.

よって $k < 0$ で $F(x)$ の方程式の一般解は $F(x) = C_1 \cos(\sqrt{-k}x) + C_2 \sin(\sqrt{-k}x)$ なので, (20) を満たすのは $F(x) = C \sin(\sqrt{-k}x)$ かつ $\sqrt{-k} = \frac{n\pi}{l}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

2. 一次元熱方程式— 2.3 有限区間における初期値-境界値問題

ここで $u(x, t) = F(x)G(t)$ が境界条件 (18) を満たすためには, やはり

$$F(0) = F(l) = 0 \quad (20)$$

が成り立たなくてはならない.

よって $k < 0$ で $F(x)$ の方程式の一般解は $F(x) = C_1 \cos(\sqrt{-k}x) + C_2 \sin(\sqrt{-k}x)$ なので, (20) を満たすのは $F(x) = C \sin(\sqrt{-k}x)$ かつ $\sqrt{-k} = \frac{n\pi}{l}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) のとき $G(t)$ の方程式は

$$G' = -\kappa \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 G$$

となりその解は $G(t) = A_n \exp \left(-\kappa \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t \right)$, ($n = 1, 2, 3, \dots$)

2. 一次元熱方程式— 2.3 有限区間における初期値-境界値問題

ここで $u(x, t) = F(x)G(t)$ が境界条件 (18) を満たすためには, やはり

$$F(0) = F(l) = 0 \quad (20)$$

が成り立たなくてはならない.

よって $k < 0$ で $F(x)$ の方程式の一般解は $F(x) = C_1 \cos(\sqrt{-k}x) + C_2 \sin(\sqrt{-k}x)$ なので, (20) を満たすのは $F(x) = C \sin(\sqrt{-k}x)$ かつ $\sqrt{-k} = \frac{n\pi}{l}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) のとき $G(t)$ の方程式は

$$G' = -\kappa \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 G$$

となりその解は $G(t) = A_n \exp \left(-\kappa \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t \right)$, ($n = 1, 2, 3, \dots$)

従って, (17) の解の列 $u_n(x, t) = A_n \exp \left(-\kappa \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) が得られる.

2. 一次元熱方程式— 2.3 有限区間における初期値-境界値問題

ここで $u(x, t) = F(x)G(t)$ が境界条件 (18) を満たすためには, やはり

$$F(0) = F(l) = 0 \quad (20)$$

が成り立たなくてはならない.

よって $k < 0$ で $F(x)$ の方程式の一般解は $F(x) = C_1 \cos(\sqrt{-k}x) + C_2 \sin(\sqrt{-k}x)$ なので, (20) を満たすのは $F(x) = C \sin(\sqrt{-k}x)$ かつ $\sqrt{-k} = \frac{n\pi}{l}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) のとき $G(t)$ の方程式は

$$G' = -\kappa \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 G$$

となりその解は $G(t) = A_n \exp \left(-\kappa \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t \right)$, ($n = 1, 2, 3, \dots$)

従って, (17) の解の列 $u_n(x, t) = A_n \exp \left(-\kappa \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) が得られる. この $u_n(x, t)$ を熱方程式 (17) の境界条件 (18) の下での固有関数とよび,

$\lambda_n := \frac{\sqrt{\kappa} n \pi}{l}$ を固有値とよぶ.

2. 一次元熱方程式— 2.3 有限区間における初期値-境界値問題

ここで $u(x, t) = F(x)G(t)$ が境界条件 (18) を満たすためには、やはり

$$F(0) = F(l) = 0 \quad (20)$$

が成り立たなくてはならない.

よって $k < 0$ で $F(x)$ の方程式の一般解は $F(x) = C_1 \cos(\sqrt{-k}x) + C_2 \sin(\sqrt{-k}x)$ なので, (20) を満たすのは $F(x) = C \sin(\sqrt{-k}x)$ かつ $\sqrt{-k} = \frac{n\pi}{l}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) のとき $G(t)$ の方程式は

$$G' = -\kappa \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 G$$

となりその解は $G(t) = A_n \exp \left(-\kappa \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t \right)$, ($n = 1, 2, 3, \dots$)

従って, (17) の解の列 $u_n(x, t) = A_n \exp \left(-\kappa \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) が得られる. この $u_n(x, t)$ を熱方程式 (17) の境界条件 (18) の下での固有関数とよび,

$\lambda_n := \frac{\sqrt{\kappa} n \pi}{l}$ を固有値とよぶ.

各 $u_n(x, t)$ が境界条件 (18) の下で波動方程式 (17) を満たすので、それらを足し合わせたもの

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \quad (20)$$

も (無限和が収束し, かつ微分可能ならば) 境界条件 (18) の下で熱方程式 (17) を満たす.

2. 一次元熱方程式— 2.3 有限区間における初期値-境界値問題

ここで $u(x, t) = F(x)G(t)$ が境界条件 (18) を満たすためには、やはり

$$F(0) = F(l) = 0 \quad (20)$$

が成り立たなくてはならない.

よって $k < 0$ で $F(x)$ の方程式の一般解は $F(x) = C_1 \cos(\sqrt{-k}x) + C_2 \sin(\sqrt{-k}x)$ なので, (20) を満たすのは $F(x) = C \sin(\sqrt{-k}x)$ かつ $\sqrt{-k} = \frac{n\pi}{l}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) のとき $G(t)$ の方程式は

$$G' = -\kappa \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 G$$

となりその解は $G(t) = A_n \exp \left(-\kappa \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t \right)$, ($n = 1, 2, 3, \dots$)

従って, (17) の解の列 $u_n(x, t) = A_n \exp \left(-\kappa \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) が得られる. この $u_n(x, t)$ を熱方程式 (17) の境界条件 (18) の下での固有関数とよび,

$\lambda_n := \frac{\sqrt{\kappa} n \pi}{l}$ を固有値とよぶ.

各 $u_n(x, t)$ が境界条件 (18) の下で波動方程式 (17) を満たすので、それらを足し合わせたもの

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \quad (20)$$

も (無限和が収束し, かつ微分可能ならば) 境界条件 (18) の下で熱方程式 (17) を満たす. そこで (20) の形の解で初期条件 (19) を満たすものを求める.

2. 一次元熱方程式— 2.3 有限区間における初期値-境界値問題

$t = 0$ を (20) に代入して

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x)$$

2. 一次元熱方程式— 2.3 有限区間における初期値-境界値問題

$t = 0$ を (20) に代入して

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x)$$

従って, フーリエ正弦展開の理論により

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{l} d\xi$$

として $u(x, t)$ は次の様に表される.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp \left(-\kappa \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

2. 一次元熱方程式— 2.3 有限区間における初期値-境界値問題

$t = 0$ を (20) に代入して

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x)$$

従って, フーリエ正弦展開の理論により

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{l} d\xi$$

として $u(x, t)$ は次の様に表される.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp \left(-\kappa \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

[練習問題] 一次元熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\kappa > 0)$$

の境界条件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

と初期条件

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & (0 < x < \frac{l}{2}) \\ l - x & (\frac{l}{2} < x < l) \end{cases}$$

の下での初期値-境界値問題を解け.

2. 一次元熱方程式— 2.3 有限区間における初期値-境界値問題

$t = 0$ を (20) に代入して

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x)$$

従って, フーリエ正弦展開の理論により

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{n\pi\xi}{l} d\xi$$

として $u(x, t)$ は次の様に表される.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp \left(-\kappa \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

[練習問題] 一次元熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\kappa > 0)$$

の境界条件

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

と初期条件

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & (0 < x < \frac{l}{2}) \\ l - x & (\frac{l}{2} < x < l) \end{cases}$$

の下での初期値-境界値問題を解け.

[解答]

$$u(x, t) = \frac{4l}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{1^2} \exp \left(-\kappa \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 t \right) \sin \frac{\pi}{l} x - \frac{1}{3^2} \exp \left(-\kappa \left(\frac{3\pi}{l} \right)^2 t \right) \sin \frac{3\pi}{l} x + \cdots \right\}$$

2. 一次元波動方程式— 2.3 有限区間における初期値-境界値問題

次に $0 < x < l$ における熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\kappa > 0) \quad (21)$$

を境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0 \quad (22)$$

及び初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \quad (13)$$

の下で初期値-境界値問題を考える.

2. 一次元波動方程式— 2.3 有限区間における初期値-境界値問題

次に $0 < x < l$ における熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\kappa > 0) \quad (21)$$

を境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0 \quad (22)$$

及び初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \quad (13)$$

の下で初期値-境界値問題を考える.

この場合も境界条件が $u(0, t) = u(l, t) = 0$ の場合と同様に考えると

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0) = \frac{\partial F}{\partial x}(l) = 0$$

となり解の列 $u_n(x, t) = A_n \exp\left(-\kappa \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right) \cos \frac{n\pi}{l} x \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$

が得られる.

2. 一次元波動方程式— 2.3 有限区間における初期値-境界値問題

次に $0 < x < l$ における熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\kappa > 0) \quad (21)$$

を境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0 \quad (22)$$

及び初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \quad (13)$$

の下で初期値-境界値問題を考える.

この場合も境界条件が $u(0, t) = u(l, t) = 0$ の場合と同様に考えると

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0) = \frac{\partial F}{\partial x}(l) = 0$$

となり解の列 $u_n(x, t) = A_n \exp\left(-\kappa \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right) \cos \frac{n\pi}{l} x \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$

が得られる. 従ってフーリエ余弦展開の理論により

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(\xi) d\xi, \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \cos \frac{n\pi\xi}{l} d\xi$$

として $u(x, t)$ は次の様に表される.

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\kappa \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right) \cos \frac{n\pi}{l} x$$

2. 一次元熱方程式— 2.3 有限区間における初期値-境界値問題

[練習問題] 一次元熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\kappa > 0)$$

の境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$$

と初期条件

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & (0 < x < \frac{l}{2}) \\ l - x & (\frac{l}{2} < x < l) \end{cases}$$

の下での初期値-境界値問題を解け.

2. 一次元熱方程式— 2.3 有限区間における初期値-境界値問題

[練習問題] 一次元熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\kappa > 0)$$

の境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$$

と初期条件

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & (0 < x < \frac{l}{2}) \\ l - x & (\frac{l}{2} < x < l) \end{cases}$$

の下での初期値-境界値問題を解け.

[解答]

$$u(x, t) = \frac{l}{4} - \frac{8l}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{2^2} \exp \left(-\kappa \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 t \right) \cos \frac{2\pi}{l} x + \frac{1}{6^2} \exp \left(-\kappa \left(\frac{6\pi}{l} \right)^2 t \right) \cos \frac{6\pi}{l} x + \cdots \right\}$$